*Разработано: учитель Кожевникова Т.Б.*

**Решение неравенств алгебраическим методом.**

**Планирование учебного материала.**

|  |  |
| --- | --- |
| № | Тема урока |
| 1 | Неравенства, содержащие рациональные выражения. Расщепление неравенств. |
| 2 | Неравенства, содержащие рациональные выражения. Метод интервалов. |
| 3 | Метод интервалов. Проверочная работа. |
| 4 | Неравенства, содержащие иррациональные выражения.  |
| 5 | Неравенства, содержащие показательные выражения. |
| 6 | Неравенства, содержащие логарифмические неравенства. |
| 7 | Неравенства, содержащие выражения с модулями. |
| 8 | Метод замены в неравенствах. Введение новой переменной. |
| 9 | Решение систем неравенств. |
| 10 | Решение систем неравенств. |
| 11 | Итоговое повторение. Проверочная работа. |

**Неравенства, содержащие рациональные выражения.**

**Метод интервалов**.

1. *Объяснение теоретического материала. Метод интервалов.*

 В процессе решения может оказаться, что в левой части неравенства количество сомножителей довольно велико, а значит, непосредственное применение правил расщепления приводит к трудоемкому решению. В этом случае оказывается эффективным применение метода интервалов.

В основе метода интервалов лежат следующие положения:

1. Знак произведения (частного) однозначно определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).
2. Знак произведения не изменится (изменится на противоположный), если изменить знак у четного (нечетного) числа сомножителей.
3. Знак многочлена справа от большего (или единственного) корня совпадает со знаком его старшего коэффициента. В случае отсутствия корней знак многочлена совпадает со знаком его старшего коэффициента на всей области определения.

 Сформулируем свойство чередования знака линейного двучлена $ax+b \left(a\ne 0\right):$

 *При переходе через значение* $x\_{0}=-\frac{b}{a}$ *знак выражения ax + b меняется на противоположный.*

Знание свойства чередования знака линейного двучлена *ax* + *b* позволяет не приводить линейные двучлены к каноническому виду$ x-x\_{0}$.

 Свойство двучлена *ax* + *b* лежит в основе метода интервалов и часто используется при решении алгебраических неравенств более высоких степеней.

 Рассмотрим выражение

$f\left(x\right)=f\_{1}$*(x)* $·f\_{2}\left(x\right)·…..·f\_{n}\left(x\right),$ *(\*)*

где $f\_{i}\left(x\right)=a\_{i}x+b\_{i}$ , причем все выражения попарно различны. Данному выражению соответствует разбиение числовой прямой на интервалы точками $x\_{i}=-\frac{b\_{i}}{a\_{i}}$ (*i=1,2...,n)*

 *Метод интервалов опирается на следующее свойство чередования знака выражения:*

*При переходе через точку* $x\_{i}=-\frac{b\_{i}}{a\_{i}}$ *из одного интервала в смежный с ним интервал знак значения выражения (\*) меняется на противоположный.*

 Действительно, при переходе через точку $x=-\frac{b\_{i}}{a\_{i}}$в выражении (\*) меняет знак только один множитель $a\_{i}x+b\_{i}$ *.*

 Аналогично можно провести рассуждения для выражения $\frac{P(x)}{Q(x)}$

где *P(x)* и *Q(x)* — выражения вида (\*).

 *Обобщение метода интервалов.*

Пусть дано выражение вида $f\left(x\right)=f\_{1}^{k\_{1}}$*(x)·* $f\_{2}^{k\_{2}}\left(x\right)·…..·f\_{n}^{k\_{n}}\left(x\right),$ *(\*\*)*

где $f\_{i}\left(x\right)=a\_{i}x+b\_{i}$, причем все выражения $a\_{i}x+b\_{i}$, попарно различны, а $k\_{1}, k\_{2},…,k\_{n}-$ фиксированные натуральные числа.

 Для решения неравенства$f\left(x\right)˅ 0$, (символ $\ll ˅\gg $ заменяет один из знаков неравенств: $ >, <, \leq , \geq ), $где выражение *f*(*x*) имеет вид (\*\*), используется *обобщенный метод интервалов,* который опирается на следующее правило чередования знака выражения:

 *При переходе через точку* $x\_{i}=-\frac{b\_{i}}{a\_{i}}$ *из одного интервала в смежный знак значения выражения (\*\*) меняется на противоположный, если* $k\_{i}$*— нечетное число, и не меняется, если* $k\_{i}$*— четное число.*

1. *Решение задач.*

Пример 1.

$$\left(x+2\right)x\left(x-1\right)\left(x-2\right)<0$$

Решение.

$$x\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)<0$$

1. Рассмотрим функцию $ f\left(x\right)=x\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)$.
2. $D\left(f\right)=R$
3. Нули функции $f\left(x\right)=0$

 $x\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)=$0

 $\left[\begin{array}{c}x=0\\x+2=0\\x-1=0\\x-2=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{c}x=0\\x=-2\\x=1\\x=2\end{array}\right.$

 4. + ─ + ─ +

|  |
| --- |
|   -2 0 1 2 |

 $f\left(x\right)<0$ при $x\in \left(-2;0\right)∪(1;2)$

Ответ: $\left(-2;0\right)∪(1;2)$

Пример 2.

$$\left(x+4\right)^{5}\left(x+3\right)^{6}\left(x+2\right)^{7}\left(x-1\right)^{8}\leq 0$$

Решение:

1. Рассмотрим функцию $ f\left(x\right)=\left(x+4\right)^{5}\left(x+3\right)^{6}\left(x+2\right)^{7}\left(x-1\right)^{8}$
2. $D\left(f\right)=R$
3. Нули функции $f\left(x\right)=0$

 $\left(x+4\right)^{5}\left(x+3\right)^{6}\left(x+2\right)^{7}\left(x-1\right)^{8}=0$

 $\left[\begin{array}{c}x+4=0\\x+3=0\\x+2=0\\x-1=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{c}x=-4\\x=-3\\x=-2\\x=1\end{array}\right.$

 4. + ─ ─ + +

|  |
| --- |
|   -4 -3 -2 1  |

 $f\left(x\right)\leq 0$ при $x×\in \left[-4;-2\right]∪\left\{1\right\}$

Ответ: $\left[-4;-2\right]∪\left\{1\right\}$

Пример 3.

 $\frac{4}{3-x} \leq 1+x$

Решение:

 $\frac{4}{3-x} \leq 1+x$ ⇔

 $\frac{4}{3-x} -1-x\leq 0$ ⇔ $\frac{4-3+x-3x+x^{2}}{3-x} \leq 0$ ⇔ $\frac{x^{2}-2x+1}{3-x} \leq 0$ ⇔

 $\frac{(x-1)^{2}}{3-x} \leq 0$

1. Рассмотрим функцию $ f\left(x\right)=$ $\frac{(x-1)^{2}}{3-x}$
2. $D\left(f\right)= \left( -\infty ;3\right)∪\left(3;+\infty \right).$
3. Нули функции $f\left(x\right)=0$

 $\frac{(x-1)^{2}}{3-x} =0$ ⇔ $\left\{\begin{array}{c}x=1\\x\ne 3\end{array}\right.$

 4. + + $─$

|  |
| --- |
|   1 3  |

 $f\left(x\right)\leq 0$ при $x\in \left\{1\right\} ∪(3; +\infty )$

Ответ: $\left\{1\right\} ∪(3; +\infty )$

Пример 4.

 $\frac{x^{3}-2x^{2}+5x+2}{x^{2}+3x+2} \geq 1.$

Решение:

 $\frac{x^{3}-2x^{2}+5x+2}{x^{2}+3x+2} \geq 1 $ ⇔ $\frac{x^{3}-2x^{2}+5x+2-x^{2}-3x-2}{x^{2}+3x+2} \geq 0$ ⇔

 $\frac{x^{3}-3x^{2}+2x}{x^{2}+3x+2} \geq 0$ ⇔ $\frac{x(x^{2}-3x+2)}{x^{2}+3x+2} \geq 0$ ⇔ $\frac{x\left(x-1\right)(x-2)}{\left(x+1\right)(x+2)} \geq 0$

1. Рассмотрим функцию $ f\left(x\right)=$ $\frac{x\left(x-1\right)(x-2)}{\left(x+1\right)(x+2)}$
2. $D\left(f\right)= \left( -\infty ;-2\right)∪\left(-2;-1)∪(-1;+\infty \right).$
3. Нули функции $f\left(x\right)=0$

 $\frac{x\left(x-1\right)(x-2)}{\left(x+1\right)(x+2)}=0$ ⇔ $\left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c}x=0\\x-1=0\\x-2=0\end{array}\right.\\x\ne -1;-2\end{array}\right.$ ⇔ $\left\{\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.\\x\ne -1;-2\end{array}\right.$

 4. ─ + ─ + ─ +

|  |
| --- |
|  ─2 ─1 0 1 2  |

 $f\left(x\right)\geq 0$ при $x\in \left(-2;-1\right)∪\left[0;1\right]∪[2; +\infty )$

Ответ: $\left(-2;-1\right)∪\left[0;1\right]∪[2; +\infty )$

3) *Домашнее задание. Тренировочные упражнения.*

1. $x^{3}+3\sqrt{5 }x^{2}+15x+5\sqrt{5} >0 $Ответ: $\left(-\sqrt{5}; +\infty \right)$
2. $\frac{x+4}{x-2} \leq \frac{2}{x+1}$ Ответ: $\left(-1; 2\right)$
3. $x \leq 3-\frac{1}{x-1}$ Ответ: $\left(-\infty ;1)\right)∪\{2\}$
4. $ \frac{1}{x^{2}+x} \leq \frac{1}{2x^{2}+2x+3}$ Ответ: $\left(-1; 0\right)$
5. $\frac{x^{2}+3x+4}{x^{2}+4x+3} \geq x$ Ответ: $\left(-\infty ; -3\right)∪\left\{-2\right\}∪(-1;1]$

***Проверочная работа.***

1. $\left(2x+7\right)\left(6-2x\right)>0 $ Ответ: $\left(-3.5;3\right)$
2. $\left(x+1\right)\left(3-x\right)(x-2)^{2}\leq 0$ Ответ: $(-\infty ;-1$]∪{2}∪[3;+∞)
3. $\frac{x^{2}\left(x-1\right)^{3}(x+2)}{x-3}\leq 0$ Ответ: $(-\infty ;-2$]∪{0}∪[1;3)
4. $\frac{x^{2}-6x+9}{8+2x-x^{2}}\leq 0$ Ответ: $(-\infty ;-$2)∪{3}∪(4;+∞)
5. $\frac{x^{2}-3x}{x-4}\geq 1$ Ответ: {2}∪(4;+∞)

***Краткий анализ знаний учащихся, полученных на уроках по теме: метод интервалов.***

Проведена проверочная работа по теме: метод интервалов.

 Оценки знаний учащихся: оценку 5 получили 9 учащихся,

 оценку 4 - 8 учащихся,

 оценку 3 - 6 учащихся,

 оценку 2 - 3 учащихся.

Абсолютная успеваемость 89% (23 ученика), качественная успеваемость 65% (17 учеников). Всего 26 учащихся.

*Основные ошибки:*

1. Не соблюдение всех четырех этапов при решении методом интервалов, например, не учитывают область определения функции (51% уч.).
2. Неправильная расстановка знаков функции на 4 этапе решения (34% уч.).
3. Не учитывают в ответе решение, при котором функция обращается в нуль (множество, состоящее из одного элемента) (62% уч.).