Муниципальное общеобразовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа поселка Изоплит

Конаковского района Тверской области

***Программа***

***элективного курса***

***«Логарифмические и показательные уравнения и неравенства»***

10-11 класс

Разработала

Шлякова М.Н. учитель математики

МБОУ СОШ п. Изоплит

**Программа элективного курса по математике для профильной подготовки**

**«Логарифмические и показательные уравнения и неравенства».**

**Пояснительная записка.**

«В самой математике главные средства достигнуть истины – индукция и аналогия»

Пьер Симон Лаплас.

Опыт философии теории вероятности.

Основной задачей модернизации российского образования является обеспечение нового качества школьного образования, соответствующего требованиям изменившейся системы общественных отношений и ценностей. В свете профилизации и модернизации школьного образования возникла необходимость создания элективного курса для развития целостной математической составляющей картины мира и для расширения возможностей учащихся по свободному выбору своего образовательного пути.

«**Логарифмические и показательные уравнения и неравенства» -** одна из важных тем школьного курса. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства часто используются на вступительных экзаменах и столь же часто оказываются не по силам абитуриентам. **Решение логарифмических и показательных уравнений, неравенств с переменным основанием** вызывает у учащихся определенные трудности. Это, видно, связано с тем, что:

* + Решение таких задач требует не только знаний свойств функций,
  + уравнений и неравенств, умения выполнять алгебраические преобразования, но также высокой логической культуры и хорошей техники исследования;
  + на освоение показательных и, особенно, логарифмических уравнений и неравенств отводится совсем немного часов, задач на эти темы решается мало, а уж повышенной трудности тем более;
  + в действующих учебниках по математике нет теоретических сведений и подбора задач по решению таких уравнений и неравенств нестандартными методами решения.

Однако, овладение методикой их решения, мне кажется, очень полезным: оно повышает умственные и творческие способности учащихся, перед нами открываются совершенно новые горизонты. При решении задач ученики приобретают первые навыки исследовательской работы, обогащается их математическая культура, развиваются способности к логическому мышлению. У школьников формируются такие качества личности как целеустремленность, целеполагание, самостоятельность, которые будут полезны им в дальнейшей жизни. А также происходит повторение, расширение и глубокое усвоение учебного материала.

Чтобы учащиеся смогли успешно сдать выпускные и вступительные экзамены, я считаю, что необходимо уделять больше внимания решению показательно-степенных,

логарифмических уравнений и неравенств на учебных занятиях, либо дополнительно на факультативах и кружках.

Таким образом, ***тема***, моей программы элективных курсов определена следующим образом: «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства».

Актуальность предлагаемой программы объясняется расхождением между стандартами математического образования за курс основной школы и требованиями,

предъявляемые при поступлении в высшие учебные заведения.

Настоящая программа предназначена для учащихся старшей школы.

***Целями*** курса являются:

* Проанализировать литературу по данной теме.
* Создание целостного представления о теме, расширения спектра задач, посильных для учащихся.
* Создание условий для развития и саморазвития личности, её потенциальных возможностей.
* Привести достаточное число примеров по данной теме разнообразных типов.
* Способствовать осознанному выбора профиля дальнейшего обучения.

Данный элективный курс решает следующие ***задачи:***

* Обобщение, систематизация и углубление знаний по теме «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства».
* Углубление и знакомство учащихся с различными, основанными на материале программы общеобразовательной средней школы, нестандартными методами решения уравнений и неравенств.
* Повышение математической культуры ученика.
* Сознательное самоопределения ученика относительно профиля дальнейшего обучения или профессиональной деятельности

Для реализации целей и задач данного элективного курса предполагается использовать следующие ***формы*** обучения: лекции, практикумы по решению уравнений и неравенств, семинары, учебный проект, работа в парах и группах. Доминантной же формой учения должна стать исследовательская деятельность ученика, которая может быть реализована как на занятиях в классе, так и в ходе самостоятельной работы учащихся. Все занятия должны носить проблемный характер и включать в себя самостоятельную работу. Организация на занятиях должна несколько отличаться от урочной: ученику необходимо давать время на размышление, учить рассуждать, выдвигать гипотезу. В курсе заложена возможность дифференцированного обучения.

Осуществление различных видов самопроверки и взаимопроверки предоставляет возможность оценить уровень усвоения изученного вопроса. Успешность усвоения курса определяется преобладанием самостоятельной творческой работы ученика. Такая организация способствует реализации развивающих целей курса. Форма итогового контроля может стать зачетная работа или защита собственного проекта по теме курса.

**Методы**

* Объяснительно-иллюстративный
* Частично-поисковый
* Словесно-наглядно - практический
* Самостоятельная работа учащихся с раздаточным материалом.

.***Ожидаемые результаты.***

В результате прохождения курса учащиеся смогут:

* + Применять изученные теоремы и алгоритмы для решения соответствующих уравнений и неравенств;
  + применять рациональные приёмы вычислений и тождественных преобразований;
  + правильно проводить логические рассуждения;
  + обладать уверенностью в решении задач эвристического плана;
  + успешно сдать ЕГЭ;
  + осознанное самоопределение ученика относительно профиля дальнейшего обучения или профессиональной деятельности.

Учащиеся будут владеть теоретическим материалом, уметь решать уравнения и неравенства на уровне требований, предъявляемых при сдаче экзаменов.

Преимущество данной программы заключается в том, что она позволяет учащимся выйти за рамки школьного курса математики и применима для различных групп школьников, в том числе и не имеющей хорошей математической подготовки.

Курс рассчитан на 23 часа в 10-11классах.

***Содержание программы.***

Предлагаемый курс является развитием систему ранее приобретенных знаний. желательно. Эту тему желательно изучать после темы «Логарифмические уравнения и неравенства », так как при изучении данного курса углубляются и систематизируются знания, и несколько расширяется материал по теме.

Все содержание располагает к самостоятельному поиску и повышает интерес к изучению предмета. В курсе решается, разбирается и учителем, и учащимися большое число сложных задач, многие из которых понадобятся как при учебе в высшей школе, так и при подготовке различного рода экзаменам, в частности ЕГЭ.

Материал предлагаемого курса поможет учителю показать своим ученикам как красоту и совершенство, так и сложность, и изощренность математических методов.

Программа содержит три блока, связанных единой идеей. На первом занятии учащимся сообщается цель и задачи элективного курса, систематизируются знания о решении логарифмических и показательных уравнений и неравенств, применение их, в том числе и при решении задач с параметром.

Освоение курса осуществляется в процессе математической деятельности учащихся, которая предполагает использование приемов и методов мышления: индукцию и дедукцию, обобщение и конкретизации, классификации и систематизации, абстракции и аналогии.

* В первом блоке повторяются и систематизируются ранее изученные знания по теме “ Логарифмические и показательные уравнения, неравенства”, повторяются все типы решения задач по теме, проводится самостоятельная работа. Этот блок доступен школьникам со средней успеваемостью.
* Во втором блоке углубляется и расширяется теоретический материал по данной теме, рассматриваются показательные и логарифмические уравнения , неравенства, которые решаются:
* методом мажорант;
* с использованием свойств монотонности и ограниченности соответствующих функций;
* методом введения новой переменной;
* геометрический подход;
* методом интервалов.
* Последний блок включает в себя набор уравнений и неравенств для учащихся интересующихся математикой и готовящихся к поступлению в ВУЗы.

Итоговый контроль по изучению курса - контрольная работа, состоящая из заданий рассматриваемых во втором и третьем блоках.

Не исключено, что данный курс поможет ученику найти свое призвание в профессиональной деятельности, требующей использовать точные науки.

**Тематическое планирование (23 часа)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Содержание | Кол-во часов | Форма деятельности и контроля |
| 1. | Актуализация знаний | 2 | Составление конспекта, тесты |
| 2 | Логарифмические и показательные уравнения | 2 | Исследовательская работа. Взаимоконтроль. |
| 3 | Логарифмические и показательные  неравенства | 2 | Собеседование, самостоятельная работа, самоконтроль. |
| 4 | Некоторые частные приёмы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств: |  | Исследовательская работа, работа в парах.  Взаимоконтроль, самоконтроль. |
| * метод мажорант; | 2 |
| * использование различных свойств функций; | 3 |
| * удачная подстановка или группировка; | 2 |
| * геометрический подход; | 1 |
| * метод интервалов. | 4 |
| 5 | Логарифмические и показательные  уравнения, неравенства на экзамене | 4 | Собеседование, работа в парах, взаимоконтроль, самоконтроль |
| 6 | Проверка усвоения знаний | 2 | Контрольное задание  (можно доделать дома) |
|  | итого | **23** | |

**Содержание курса**:

**Тема 1: Актуализация знаний**. **(2 часа)**

Основные свойства логарифма Равносильность и следование предложений. Логарифмирование и потенцирование.

**Тема 2: Уравнения и неравенства. (4 часов)**

Показательные уравнения. Логарифмические уравнения. Классификация и методы решения уравнений. Логарифмические и показательные неравенства

**Тема 3: Нестандартные приемы решения уравнений и неравенств.**

**(8 часов)**

Метод мажорант. Использование различных свойств функции. Удачная подстановка или группировка. Графические методы решения уравнений, неравенств, систем (в том числе с параметрами).

**Тема 4: Метод интервалов для показательных и логарифмических неравенств.**

**(4 часа)**

Показательные неравенства. Логарифмические неравенства.

(Условия равносильности переходов)

Неравенства для логарифмов с переменным основанием.

**Тема 5:решение уравнений и неравенств (4 часа)**

Уравнения и неравенства, предлагавшиеся на ЕГЭ прошлых лет и на вступительных экзаменах в ВУЗы.

**В результате изучения данного курса учащиеся приобретут:**

- представление о роли математики в познании мира, математических методах исследования;

- знания основных алгоритмов решения уравнений и неравенств, различных методов и приёмов решения;

- умения:

* Работать с различными источниками информации;
* Анализировать результаты, делать умозаключения;
* Представлять результат своей деятельности, участвовать в дискуссии;
* Решать различными методами показательные и логарифмические уравнения и неравенства;
* Выбирать рациональный способ решения.

*Приложение*

Блок № 1 посвящен обобщению материала по теме « Логарифмическая и показательная функции».

**Введение. Основные свойства логарифма**

В школьном курсе для любого положительного числа *п* определяется число  *аm/ п*,

где *т —* целое число, а п -натуральное число. Если m/n *>* О, то *аm/ п* определено и для *а =* 0.

Затем для любого положительного числа *а* вводится поня­тие ах, где *х* — любое действительное число.

Если *х >* О, то *0х* =0. Заметим, что 0° не определено.

Если *а =* 1, то 1*х =* 1 для любого *х.*

Принимается без доказательства, что для любых положи­тельных чисел *а* и *b* и любых действительных чисел *х и у* спра­ведливы свойства:

*ах*  *ау = ах+у; ax/ay= ах-у*

*(ах)у = аху ; ахЬх =* (*аb)*х ; *ax/bx=* (a*/b)х*  (0)

Так как при *а >* О для любого действительного числа *х* определено число аx, то можно рассматривать функцию *у = ах,* определенную на всей действительной оси.

Если *а >* О, *а* 1, то функция *ах* отлична от постоянной. Ее называют *показательной функцией с основанием а.*

Если *а >* 1, то функция *ах —* монотонно возрастает на R; если 0 < *а <* 1, то функция *ах* монотонно убывает на R

Область значений показательной функции — множество R+ всех положительных чисел (рис. 1 - 2).

x

y

1

0

y = *ax , 0<a<1*

x

y

b

1

0

y = *ax,a>0*

рис.1 рис.2

b

Отсюда из монотонности (любая горизонтальная прямая *у=N*, *N >* 0 пересекает график функции *у = ах, а >* 0, *а*  1 ровно один раз) следует, что если *а >* 0, *а* 1, то для любого положительного числа *N* существует единственное число *b*, та­кое, что *аь = N.* Это число называется *логарифмом* числа *N* по основанию *а* и обозначается *Ь =* 1оg *a* *N.* Из определения следует равенство

.

Это равенство называется *основным логарифмическим тожде­ством.* Но по сути, тождеством оно не является, так как оно верно не для всех значений *а* и N. Оно верно только для N > 0, *а>*0, *a*1. Эти значения называются ОДЗ выражения1оgа *N.*

Свойства (1)-(5) при вышеописанных условиях *(М* >0, *N > 0)* являются тождествами и читаются как справа налево, так и слева направо. Из определения следует, что основанием логарифма может быть любое положительное число, не равное единице, а лога­рифмы существуют только у положительных чисел.

В школьном курсе математики показывается, что если *а >* 0, а1,М>0, N>0, c— любое действительное число, то верны формулы:

log*a*MN = log*a*M+log*a*N; (1)

log*a*M/N = log*a*M-log*a*N; (2)

log*a*M*c* = *c*log*a*M (3)



, k0 (4)   
 Если, к тому же, *b>0, b*1, то log*a*M = log*b*M / log*ba.* (5)

Последняя формула позволяет переходить от логарифма по основанию *а* к логарифму по основанию *b.* Она называется *формулой перехода к новому основанию.*

Заметим, однако, что левые и правые части равенств в (1) и (2) имеют разные области определения: левая часть определена при *МN* > 0, а правая — при *М >* О, N > 0. Это надо учитывать при решении задач: *МN* > 0 не только тогда, когда *М >* О, N > 0, но и тогда, когда *М<* 0, *N <* 0. Учтем, что *МN =* (-М)(-N), и для *-М* > О, -N > 0 (в силу (0))

10g*а*(-М)(-N) = log*a*(-M) + 1о8*а*(-N).

Теперь запишем более общие формулы.

Если *МN* > 0, то

.

Если М  0, N0, тo

.

Аналогично показывается, что если *МN* > 0, то

.

Если *М*  *0*, *N* 0, то

.

Если *М* 0, то для любого натурального *п* 

Все свойства читаются в обе стороны (т. е. являются тождествами) при выполнении приведенных для каждого из них условий. Учитывая все свойства показательной функции и определение логарифма, можно построить эскизы графиков — рис. 3 - 4

y

1

y = log*a*x, 0<*a*<1

xx

0

1

x

y

y=log*a*x*, a*>1

0

Рис.3

Рис.3 рис.4

Отметим некоторые наиболее употребляемые частные свой­ства:

1) 1оg *а* 1 = 0, а > 0, а  1, т. е. логарифм числа 1 при любом допустимом основании равен 0;

2) 1оg *а ах =* х, а > 0, а 1. Это свойство часто применяют в «обратном» порядке — чтобы выразить заданное число *b* через логарифм по основанию а, а именно, *b=loga ab*

***Равносильность и следование предложений***

Если множество решений одного предложения (уравнения, неравенства или системы) А принадлежит множеству решений другого предложения В, то второе предложение называется следствием первого. Это обозначается так: АВ, читается: «из А следует В»

***Тест 1.*** В каком из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «».

Укажите эту пример.





2. Предложения А и В называются равносильными, если множества их решений совпадают. Это обозначают так: «АВ».

***Тест 2.*** Одна из следующих пар предложений состоит из неравносильных предложений. Укажите эту пару.

 и x =1.  и x=y

 и   и 

 и x>2.

***Тест 3.*** В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак «».

Укажите эту пример.







|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер теста | 1 | 2 | 3 |
| Номер правильного ответа | 3 | 4 | 4 |

***Ключ к тестам***

**Логарифмирование и потенцирование**

При решении показательных и логарифмических уравне­ний особенно часто используются два преобразования: потенцирование и логарифмирование. Эти преобразования *не являются равносильными* переходами.

Логарифмированием уравнения */(х) = g(х)* по основанию *а (а >* 0, *а*  1) называется переход от уравнения */(х)* = g*(х)* к уравнению *1оgа/(х)* = 1оgаg(я). При этом область существо­вания (ОДЗ) уравнения сужается, т. к. логарифмы существуют только у положительных чисел.

**Например,**



Уравнения х3 = х и lg x3 = lg x не равносильны, т.к.имеют разные множества решений.

Потенцированием называется переход от уравнения *logaf(x) = logag(x)* к уравнению *f(x) = g(x)* При этом область определения расши­ряется, т. к. второе уравнение может существовать при любых *f*(x), *g(х),* а первое — только при положительных.

Поэтому запишем и запомним: если *f(х) = g(х)* и *f(х)* > О или *g(х) >* 0, то

*logaf(x) = logag(x).* (6)

Из равенства функций и положительности одной из них следует положительность другой, поэтому проверяем условие положи­тельности только той функции, для которой это сделать проще.

Если *logaf(x) = logag(x),* то

*f(x)>0, g(x)>0* и *f(x) = g(x). (7)*

Итак, из (6) и (7) следует условие равносильности *logaf(x) = logag(x)*



При решении логарифмического уравнения удобно пользоваться той системой, в которой неравенство проще проверить.

**Показательные уравнении**

Из монотонности показательной функции следует, что *ах* = *ау <=> х =у.*

Из свойств показательной функции следует, что если *а >* 0, *а*  1, то простейшее показательное уравнение *ах = b* при *b* 0 не имеет решения, а при b *>* 0 имеет единственный ко­рень *x= 1оgа b.*

Для успешного решения большинства учебных примеров решающим является умение преобразовать исходное уравнение к более простому.

При этом необходимо знать решения следующих основных уравнений (а > 0, *а*  1, *b(х) >* 0):

1. *аf(x)* =*a* g(x) */(х) =g(х).*

2. . *аf(x)* = *b(х)*  */(х) = 1оgа* *b(х).*

3.g*(аf(x)) =* 0. Это уравнение заменой переменных сводится к уравнению *аf(x)* *= t* сводится к уравнению *g(t)* = 0 (где *g(t)* чаще всего будет многочленом 2-й или 3-й степени), у которого отыскиваются положи­тельные корни, а затем решаются уравнения типа 2.

4. Для любых *а >* 0, *Ь >* 0, *с>0, c*1, *h >* 0, *d >* 0:

*a b f(x)=h d g(x)* *log c a + f(x) log c b = log c h + g(x) log c d*

Уравнения, в которых основанием являются числа 1 или п не относятся к показательным, потому что функции 1х и 0х, по определению, не называются показательными. Можно отметить, что имеют место соотношения:

;



Выражение 0° в математике не определено.

**Логарифмические уравнения**

Традиционно логарифмические уравнения вызывают за­труднения у многих школьников. Во-первых, потому, что у ло­гарифма есть область определения. Во-вторых, логарифмические выражения могут быть любыми положительными функ­циями, и надо помнить, что последующие преобразования могут быть неравносильными (например, возведение в квадрат) и по­теря или приобретение корней в промежуточных выкладках уже не связано с ОДЗ логарифмов.

Поэтому при решении простых логарифмических уравне­ний лучше пользоваться равносильными преобразованиями. В противном случае надо записать ОДЗ уравнения, но не надо находить его (решить все неравенства, связанные с ОДЗ, бывает намного труднее, чем решить само уравнение, а иногда и просто невозможно). После нахождения корней необходимо в этом случае сделать проверку. Если корень не принадлежит ОДЗ, то он не может быть решением. Если же корень принадлежит ОДЗ, надо подставить его в уравнение.

Основными типами логарифмических уравнений являются следующие уравнения

*log a f(x) = log a g(x),*

*g(log a f(x)) = 0.*

Второе уравнение сводится соответствующей заменой перемен­ных к одному или нескольким уравнениям первого вида.

При решении показательных и логарифмических уравнений можно пользоваться такими равносильными переходами



Равносильность следует из строгой монотонности как показательной (в (1)), так и логарифмической (в (2)) функций.

*Замечание.* Вместо системы, полученной в (2), можно решать эквивалентную ей систему



Выбор зависит от того, какое неравенств, u>0 или v>0, Вам проще решить.

Имеет место равносильный переход, выражающий стандартное определение логарифма:



Рассмотрим несколько примеров решения показательных и логарифмических уравнений, с которыми мы встречались на уроках алгебры.

**Пример № 1**. Решите уравнение ****

Решение: **** х-3 = log 3 7  x = 3+log 3 7.

Ответ: x = 3+log 3 7.

**Пример № 2**. Решите уравнение 

Решение:   (x+1)lg3 = (x-2)lg5 x(lg3-lg5) = -lg3-2lg5







Ответ:

**Пример № 3**. Решите уравнение log 7 log 3 log 2 x = 0

Решение: log 7 log 3 log 2 x = 0  log 3 log 2 x = 1  log 2 x = 3  x = 8

Ответ: 8

**Пример № 4** . Решите уравнение 



Решение: 





 x = 4

Ответ: 4

При выполнении некоторых действий над логарифмами, входящими в уравнение необходимо следить за равносильностью переходов.

Советуем предварительно выполнить задания теста 4.

***Тест 4.*** В одном из приведенных ниже примеров поставлен знак «». Укажите этот пример.



Ответ: 4.

**Пример № 5**. Решите уравнение lgx+lg(x+3)=1



Решение: lgx+lg(x+3)=1 





Ответ: 2.

***Запомни!*** Равносильность переходов:







***Упражнения:***



***Самостоятельная работа***

Вариант 1.



Решите уравнения:

Вариант 2.



Решите уравнения:

Вариант 3.



Решите уравнения:

***Ответы:***

Вариант 1. *a*) ½; *b*) -2.

Вариант 2. *a*) 2; *b*) -2.

Вариант 3. *a*) 8; *b*) 2.

***Контрольные вопросы.***

1. Основные пути решения показательных уравнений.
2. Основные пути решения логарифмических уравнений.

Подводя итоги, можно сказать, что уравнения, как правило, осуществляется по следующему плану:

1. *Техническая часть, т*.е. осуществление цепочки упрощений по схеме

(1) – (2) – (3) – (4) - … и отыскание корней последнего (самого простого) уравнения этой цепочки.

2. *Анализ решении,* т*.е.*получения ответа на вопрос: все ли преобразования были равносильными.

3. *Проверка* найденных корней последнего уравнения цепочки их подстановкой в исходное уравнение в случае, если анализ, проведенный на втором шаге, покажет, что не все преобразования были равносильными.

***Логарифмические и показательные неравенства*.**

Из строгой монотонности логарифмическойипоказательной функции следует равносильность таких переходов:



***Тест 5.*** Среди приведенных высказываний найдите истинное:



Ответ: 2

Рассмотрим несколько примеров решения показательных и логарифмических неравенств.

***Пример 1.*** 

Решение. Логарифмическая функция у = log 0,5 t - убывающая. Имеет место равносильный переход (7):

 . Ответ: (-1;1/2).

***Пример 2. ***

Решение. Заменив в правой части 2 на и прологарифмировав неравенство по основанию , приходим к неравенству 2x>log 1/3 2 (равносильный переход (5)).

Ответ: ().

***Пример 3. ***

Решение. Здесь следует обратит внимание на то, что переменная х входит в основание логарифма. В зависимости от х основание логарифма может быть положительным и меньшим единицы или большим единицы, то есть при одних значениях х возможен переход (6). А при других – переход (7):



Ответ:

Запишем общий вид равносильных переходов, используемых при решении показательных и логарифмических неравенств.

 (8)  (9)

Замечание. Последний равносильный переход можно записать следующим образом:



Он отличается от перехода (9) тем, что случай *f(x)* = 1 рассматривается отдельно, но при решении задач последний переход, очевидно, требует лишних вычислений. Однако иногда полезно применять его для самопроверки.

 (10)

 (11)

 (12)

Теперь с помощью этих равносильных переходов решим примеры.

***Пример 4. ***

Решение. Перепишем неравенство в виде***.***Согласно (9)

получаем совокупность



Ответ: [-1/2;1]

***Пример 5. ***

Решение. Поскольку ,неравенство можно записать следующим образом: ***.*** Пользуясь переходом (10), получаем совокупность:

Решение каждой из получившихся систем не представляет особого труда. Решите их сами самостоятельно.

Ответ: (1/2;1).

***Упражнения.***

1.



***Самостоятельная работа***

Вариант1.

Решите неравенство: 

Вариант2. 

Решите неравенство:

Вариант3.

Решите неравенство 

Если вглядеться в формулы, то видно, что все они построены по одной схеме: надо рассмотреть два случая – когда основание больше единицы с сохранением неравенства и когда оно лежит между нулем и единицей с заменой его на протиположное.

Блок № 2. ***Нестандартные приемы решения уравнений и неравенств.***

**Метод мажорант.**

Мажорантой данной функции *f*(х) на множестве *Р* (или множества *А* чи­сел) называется такое число М, что либо *f(х)* ≤*М* для всех *х* ∈ Р, либо *f*(х) ≥ *М* для всех *х* ∈ *Р* (соответственно, *х* ≤ *М* для всех *х* из *А,* или *х* ≥*М* для всех *х* ∈ *А).* Мы знаем много мажорант для известных функций. Напри­мер, любое число, большее или равное 1 будет мажорантой для функций sin х и соs х на любом множестве.

*Метод мажорант использует такое свойство как ограниченность*

Основная идея метода мажорант состоит в следующем:

Пусть мы имеем уравнение *f(х) =* g(х), и существует такое число М, что для

любого х из области определения *f*(х) и *g(х)* имеем /(х) ≤ *М* и *f(х)* ≥ *М.*

Тогда уравнение*f* (х) = *g(х)* эквивалентно системе



Как искать такое число М? Ну, это просто. Вы ведь владеете таким мощным средством исследования функций как производная. С ее помощью вы можете найти наибольшее значение функции /(х) и наименьшее значение 0(х). Если они совпадают, то за *М* можно принять их общее значение. Но чаще всего производная не понадобится, если вы хорошо владеете следующими неравенствами:

(1) 

причем равенство достигается только при а = ±1

(2)  при  *a ≥ 0, b ≥ 0,*

Причем равенство достигается только при *a=b.*

Впрочем, лучше всего метод мажорант осваивать в процессе решения задач.

**Задача 1.** Решить уравнение 2 cos x = 2x + 2-x.

**Решение.** Левая часть данного уравнения не превосходит 2 , а правая – не меньше 2 (докажите, что 2х +2-х ≥ 2). Следовательно, равенство может иметь место лишь при условии, что левая и правая части равны 2, т.е. х = 0.

Ответ: 0.

**Задача 2.** Решить уравнение 

Докажем, что данное уравнение не имеет решений. Перейдем к следствию (потенцируем):

. Оцениваем левую часть на основании неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим :

,

левая часть меньше правой. Уравнение не имеет решений.

*Ответ:*  Нет решений.

**Задача 3.** . Найти все пары (х,у), для которых

.

**Решение.** Область допустимых значений уравнения состоит из таких пар (x,y), что

соs(хy) ≠0.



В этой области соs2(ху) + ≥0 причем равенство достигается

только при *соs2(ху) =* 1 (см. формулу (1)). Отсюда следует, что левая часть уравнения не меньше 1.

С другой стороны, *у2* -2у + 2 = *(у-* I)2 + 1 ≥1, откуда следует, что правая часть уравнения не превосходит 1, причем равенство достигается только при *y* = 1 . Отсюда и получаем

*Ответ: х* = 

**Задача** 4. Решить неравенство

**Решение.** Ясно, что . Отсюда следует, что 

Тем самым, установлено, что  (3)

Причем равенство достигается только при .

Далее, , так что (4) причем равенство достигается при

соsх = -1.



Сложив неравенства (3) и (4), получим, что

причем равенство достигается только при соs *х =* — 1. Поскольку нам требуется решить противоположное неравенство, его решениями будут только те *x,* при которых оно обращается в равенство.

*Ответ: х* = π + 2πn, n∈Z

***Упражнения:*** Решите уравнения, неравенство:

***Использование различных свойств функций.***

На этом уроке мы покажем, как применяются свойства монотонности, четности и периодичности. Чаще всего используется монотонность функций. Например, если у вас есть уравнение f(х) = *с* и функ­ция f возрастает, то она может принимать значение *с* не более, чем в одной точке. А эту точку, как правило, можно просто угадать.

На этом общие рецепты здесь и заканчиваются. Давайте посмотрим на примерах, как "работают" указанные свойства функций.

2

**Задача 1.** Решить неравенство 1оg2(*x*∙2*x*2 ) ≥1 + *2х.*

**Решение.** Область допустимых значений неравенства состоит из *х* > 0.

Преобразуем левую его часть:

Значит, наше неравенство эквивалентно следующему



Теперь нужно заметить, что при *x* > 1 возрастает как логарифм, так и функция (x-1)2-2. Значит, сумма этих функций также возрастает и может принимать значение равное нулю не более, чем в одной какой-то точке *x*о, причем при *x≥x0*правая часть не меньше нуля, т.е. все такие *х* являются решениями, а при 1 < *х* < *хо* правая часть отрицательна, т.е. ни одно *х < х0* (большее единицы!) не есть решение исходного неравенства. Осталось выяснить, есть ли решения на промежутке (0, 1]. Но при *х* из этого промежутка логарифм отрицателен (или равен нулю), а квадратный трехчлен принимает значения от —2 до — 1 (проверьте сами!). Значит, левая часть строго отрицательна на (0, 1], т.е. на этом промежутке нет решений.

Осталось найти х0. Задача подобрана так, чтобы можно было легко его угадать — здесь х0 = 2.

*Ответ: х* ≥2

**Задача 2.** Решить уравнение .

**Решение.** Пусть х2-2х-2=*у.* Заметим сначала, что 

Теперь исходное уравнение принимает вид



Все преобразования законны, поскольку *b>1* и  *y>1*.

Если мы, докажем, что функция g(y) =является возрастающей, то будет установлено, что значение она может принимать не более, чем в одной точке. А такая точка легко угадывается – это *y=b.*

Следующая выкладка показывает, что *g(y)* возрастает: 

Действительно, функция убывает. Значит, убывает и функция . Кроме того, функция  также убывает, откуда заключаем, что функция ∙ убывает. Значит, она же со знаком минус и с прибавленной единицей возрастает, что и требовалось доказать.

Нам осталось решить уравнение х2 — 2х — 2 = 8 + 4√3

*Ответ: х* = 1 ±



**Задача** 3. Решить неравенство

**Решение.** Здесь придется разобрать несколько случаев. Отметим, прежде всего, что ОДЗ неравенства состоит из х > -2, x ≠0, -1/2. Получим эквивалентное неравенство

Случай 1. х > 0.

Тогда неравенство можнo умножить на х



Теперь легко усмотреть, что левая и правая части неравенств есть возраста­ющие функции от х, причем правая строго меньше 3 для любого х > 0.

Если х ∈ (0, 1], то левая часть не меньше 2, а правая не превосходит своего значения в единице, т.е. числа 2. Значит, при таких х наше неравенство не выполняется, так как правая часть не превосходит левую.

Если х ∈ (1,2], то левая часть не меньше 1 + 1оg2 3, а правая — не больше, чем 12/5 (т.е. значения в х = 2). Но

343=35 >128=27⇒3>27/5⇒log23>7/5⇒1+log23>12/5

Мы доказали, что и на промежутке (1,2] неравенство не имеет решений.

Если х > 2, то левая часть больше трех и опять здесь нет решений, по­скольку, как мы отметили, правая часть всегда строго меньше трех.

Случай 2.



Тогда исходное неравенство эквивалентно следующему



Легко видеть, что на этом промежутке левая часть больше нуля, а правая — меньше, так что весь интервал (-1/2,0) состоит из решений исходного неравен­ства.

Случай 3. - 2 < х < -1/2. В этом случае левая часть строго меньше двух, тогда как правая строго больше трех (проверьте сами, пожалуйста). Отсюда следует, что ни одна точка указанного интервала не входит в ответ. Вот мы и разобрали все возможные случаи.

*Ответ: х* ∈ (-1/2,0).

**Задача 4**. Решить уравнение

**Решение.** Данное уравнение имеет очевидное решение при х = 1. Докажем, что других решений нет. Поделим обе части на 7х, получим . Левая часть представляет собой монотонно убывающую функцию. Следовательно, каждое свое значение она принимает один раз, т.е. данное уравнение имеет единственное решение.

***Ответ***:х=1

Идея на которой основывалось решения примеров, очень проста: *если f(x)монотонно возрастает, а u(x) монотонно убывает, то уравнение f(x)=u(x)имеет не более одного решения, причем если х=х0 – решение этого уравнения, то при х>x0 (х входит в область определения обеих функций f(x) и u(х)) будет f(x)> u(x), а при х∠ x0 будет f(x) < u(x).*

Следует обратить внимание на одну модификацию этой идеи, а именно:если *f(x) –* монотонная функция, то из равенства *f(x) = f(y)* следует, что *х=у.*

**Задача** 5. Решить уравнение

Решение. Преобразуем уравнение:



Рассмотрим функцию *f(t)=logt(t+1).*

Докажем, что эта функция монотонно убывает. Это можно сделать, например, стандартным образом: найти производную *f′(t) ()* и доказать, что *f′(t)<0* при *t>1*. Покажем другой способ:

*f(t)-1=logt(t+1)-1=logt(1+1/t).*

Получившаяся функция, очевидно, является убывающей (основание растет, под знаком логарифма функция убывает).

Наше уравнение имеет вид:*f(6-x)=f(log2x),* значит *log2x=6-x*

Слева функция возрастающая, справа убывающая, следовательно, решение единственно, оно легко находится подбором: х=4.

*Ответ*:х=4

***Уравнения вида f(f(x)).*** При решении уравнений указанного в заглавии вида полезна, бывает **теорема:**

*Если у=f(x) - монотонно возрастающая функция, то уравнения f(x)=x u f(f(x))=x эквивалентны.*

***Замечание.*** Если *y=f(x)*монотонно возрастает, то при любом *k* уравнения *f(f(…f(x)…))=x* и *f(x)=x* эквивалентны.

**Упражнения**

1. Решить неравенство (xx-7x-6)∙sin x ≥ 0 (2πn, π+2πn), n∈Z, n ≥ Z

2. Решить неравенство 5х+12х ≤13х  [ 2;+∞ )

3. Что больше 1оg9 10 или 1оg10 11? больше

4. Решить уравнение  

5. Решить уравнение  х=0

6. Решить уравнение  х=2

**Самостоятельная работа.**

Вариант1. Вариант2. Вариант3.

Решите. Решите. Решите.

 **** ****

**Ответы:**  Вариант1. *а)(1/2;1) б) х=2*

Вариант2. *а) ø* б) (-;-2]

Вариант3. *а) х=1* б*)(0;1) (1;+∞)*

***Удачная подстановка или группировка.***

Распространенный способ решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств – замена переменной, сводящая уравнение или неравенство к алгебраическому (без показательной и логарифмической функций). После решения алгебраического уравнения или неравенства остается решить совокупность или систему простейших показательных или логарифмических уравнений и неравенств.

Задача 1. Решить уравнение ******

Решение. «Прологарифмируем» уравнение по основанию2.

*******log2*******

Решением первого уравнения этой совокупности является х = 1.После замены log2x = *a* второе уравнение перепишется в виде *a2-3a-4=0*. Это уравнение имеет корни *а* = 4 или *а*=1, откуда х = 16 или х = ½

Ответ:{1/2;1;16}

*Замечание*. При решении этого уравнения способом сравнения степеней с одинаковыми основаниями довольно часто теряется решение х = 1(приравниваются только показатели степеней, а случай равенства основания степени единице не рассматривается). При решении этим способом следует использовать равносильный переход (3).

Задача 2. Решить уравнение 

Решение. Приведем все логарифмы к одному основанию. Тогда уравнение примет вид:  Сделаем замену: log3x =y.

Получим: 

****** . Итак, 

Ответ:{1/9;1;3}

Задача 3 . Решить уравнение 

Решение. Так как 81х ≠ 0 при любом значении переменной х , то данное уравнение равносильно такому: .

Положив,  = *у* получим уравнение 

Итак, = -1или= 2/3. Первое уравнение решений не имеет, так как >0 при любом значении х, а решением второго является х = ½.

Ответ:{½}.

*Замечание.* Уравнение из условия задачи 4 является однородным относительно переменных 4х, 9х. Напомним, что уравнение *f(x,y)=*0 называется однородным степени *m ≠ 0*, если для любого t выполняется равенство *f(tx, ty)* = *tmf(x, y).*Если *f(x, y)* является многочленом относительно переменных х и у , то разделив это уравнение на ym, получим уравнение относительно одной переменной x/y = z

Задача 4. Решить неравенство 

Решение. Сделаем замену  Тогда *** *** Итак, 

Ответ. (-∞; 0)(log2 4/3; 1).

Задача 5. Решить неравенство 

Решение.  ******

Сделаем замену *logx2 = y.* Получим:

. Итак, исходное неравенство равносильно

Ответ: (

**Упражнение:**

1. 

2. 

3.

4. 

5. 

6.

7. .

**Самостоятельная работа**

Вариант1. Вариант2. Вариант3.

Решите. Решите. Решите.

**Ответы:**

Вариант1. *a)* (2;6] *b){1/10,1000}*

Вариант2. *a)* {-2;1} *b)(1;+∞)*

Вариант3. *a)* {27}  *b*)[√6-1)∪(2;5]

**Геометрический подход**

Геометрическая интерпретация алгебраических задач, или иначе – перевод их на геометрический язык, является эффективным средством решения задач. Применение геометрических методов состоит в изображении на координатной плоскости графиков и множеств, относящихся к заданной ситуации, и, в зависимости от геометрических свойств последних, упрощение рассматриваемой задачи. Построение графиков помогает и найти решение, и убедиться в его правильности или обнаружить ошибку, что немаловажно при написании экзаменационной работы.

Графическая интерпретация некоторых теоретических утверждений настолько убедительно показывает их истинность, что вполне может, рассматриваться как их доказательство. К таким утверждениям относятся теоремы:

* если функция y=*f(x)* - возрастающая (убывающая), то функция *y=af(x)+c при* a>0 - возрастающая (убывающая), а при a<0 - убывающая (возрастающая);
* если функция y=*f(x)* - возрастающая (убывающая), то уравнение *f(x)=a* имеет не более одного решения;
* если функция y=*f(x)* - возрастающая (убывающая), а функция *y=g(x)* убывающая (возрастающая), то уравнение *f(x)=g(x)* имеет не более одного решения.

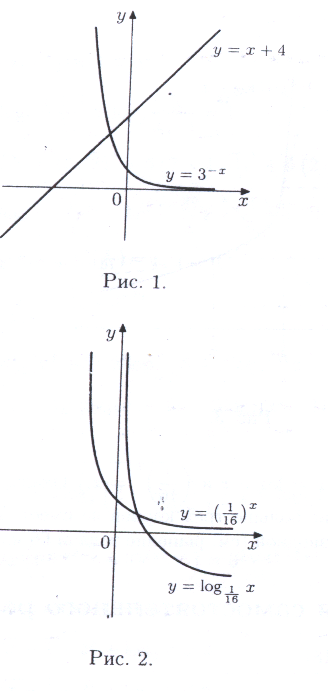
**Пример 1 .** *x+4=3-x.*

**Решение.** Легко подобрать ( например, при помощи чертежа – см. рис.1) корень данного уравнения *x = -1:-1+4=31.* Покажем, что других решений нет.

Функция *y=x+4-3-x* возрастающая, а потому каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Следовательно, у исходного уравнения не может быть больше одного решения.

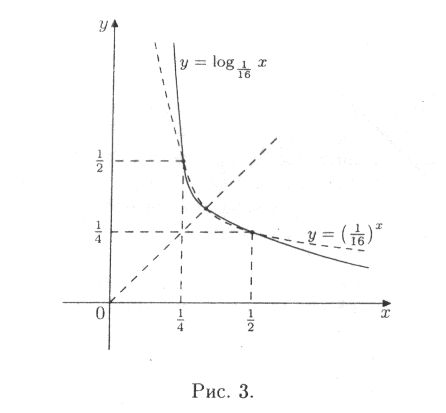
Ответ: {1}

*Замечание.* Когда мы доказываем, что какое-то уравнение не имеет больше корней, за исключением уже найденного, чаще всего мы опираемся на свойства монотонности правой и левой части уравнения: если *f (x0) = g (x0)*, причем функция *f (x)*, строго возрастает, а *g(x)* строго убывает в области допустимых значений *x,* то уравнение *f(x) = g (x)* не имеет корней, отличных от *x0*. В случае же, когда подобное уравнение не выполнено, вывод о числе корней уравнения сделать трудно. Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.



Рассмотрим уравнение (1/16)*x* = *log1/16x*. Из чертежа (рис. 2) «ясно», что данное уравнение имеет единственный корень, причем, поскольку функция (1/16)*x* и *log* 1/16*x* взаимно обратные, соответствующая точка пересечения будет лежать на прямой *y* = *x*. Однако, оказывается, что данное уравнение имеет еще два корня: *x* = ½ и *x* = ¼. (проверьте!). Дело в том, что графики были изображены слишком неточно.

На самом деле графики пересекаются в трех точках (см. рис. 3), причем третий корень нельзя записать с помощью элементарных функций (это общий корень уравнений *x* = *log* 1/16*x* и (1/16)*x*= *x*.) Оказывается, что рассматриваемое уравнение больше трех корней не имеет.



Графические интерпретации одно из самых эффективных средств решения различных задач с параметрами. Следует выделить две разновидности рассматриваемого приема:

1. изображение на плоскости (х;*а*), где х – неизвестное, *а* – параметр;
2. на плоскости (х;у) рассматривается семейство кривых, зависящих от параметра *а.*

**Пример 2.** *При любом значении параметра а решить неравенство*

*log x (x-a) >1.*

*Решение.*  Рассмотрим плоскость *(x;a)* и изобразим на ней множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству (рис.).

*а*

1

1/4

-1

х

-1

-2

Сначала изобразим область для точек которой имеет смысл *log x ( x-a)*. Это будет полуплоскость *x-a>*0 ( правее и ниже прямой *x-a*=0), из которой удалены части прямых *x =*0, *x =-*1, *x =*1. Вне полосы, ограниченной прямыми *x =-*1 и *x =* 1, будет *x* 2>1, и, следовательно, после потенцирования неравенства получим *x-a>x2*, *a<x-x2*.

Последнему неравенству соответствует область под параболой *a = x-x2* ( напомним, при этом | *x*|> 1).

Внутри полосы(|x| > 1) будет *a > x-x2*. на рисунке область ( *a; x*), для точек которой

*log x (x-a)*> 1 заштрихована.(заметим, что парабола *а=х-х2* касается прямой *а=х*.) теперь ось *а* точками 1, ¼, 0, -1. -2 разбита на шесть участков, на каждом из которых легко выписывается решение нашего неравенства. Для этого берем *а* на соответствующем участке, проводим горизонтальную прямую, находим значения *х*, соответствующие концам отрезков этой прямой, попавших в заштрихованную зону.

*Ответ:* если*а*≥1, *а=*0, то решений нет;

если ¼<*а*<1, то *а*<х<1;

если 0<*а*≤¼, то *а*< х <½-√¼-*а* и ½+√¼-*а*< х <1;

если -1≤*а*<0, то *а*< х <½√¼-*а* и 1< х <½+√¼-*а*;

если -2<*а*<-1, то -1<х<½­√¼­*а* и 1< х <½+√¼­*а;*

если *а* = -2, то1<х<2;

если *а*<-2, то ½­√¼­*а*< х < -1 и 1 < х <½+√¼­ *а.*

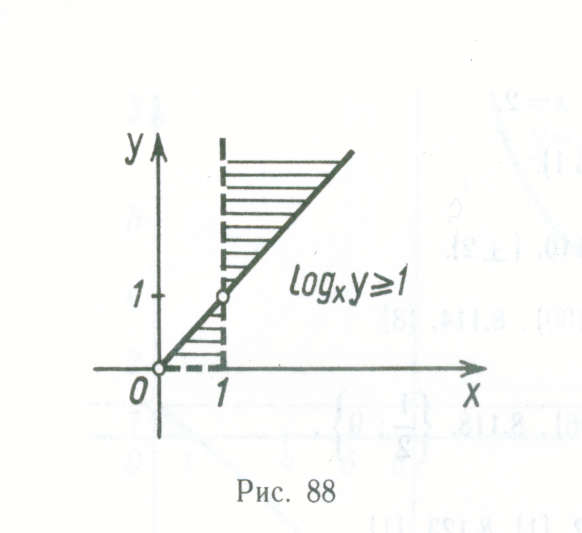
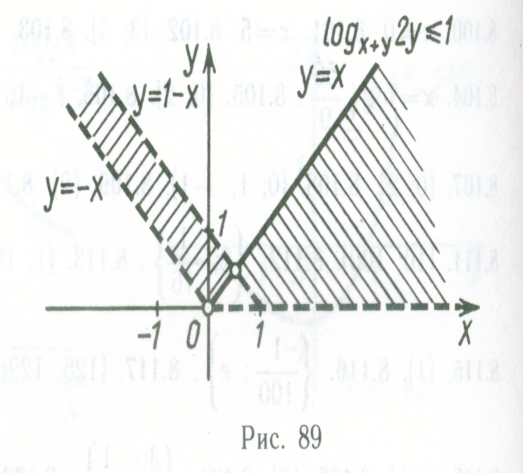
*Упражнение*

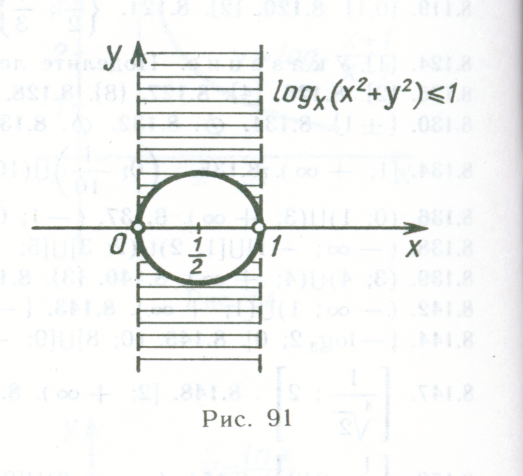
1. Найти все значения параметра *а* при каждом из которых уравнение

*loga-6,5([2+1) = loga-6,5 ((a-5)x)* имеет два различных корня. (7;7,5)∪ (7,5;+∞)

2. *Решите неравенство* 3х+1 = 11-2х {1}

*Постройте множества точек с координатами (х;у), удовлетворяющими данным условиям и решите неравенство:*

1. *logxy ≥ 1* (рис. 88)2. *logx+y2y≤1* (рис.89)3. *logx(x2+y2)≤1* (рис. 91)  **

**

**

Упражнение: *Решите неравенства.*

1. 3х>12-1,5x (2;+∞)

2. 2x≤√x решений нет

*Сколько корней имеют уравнения в зависимости от* *а.*

1. Если *а*<-9, то нет решений; если *а*=-9 или *а* ≥0, то одно решение; если -9<*а*<0, то два решения. Указание. Достаточно построить график *у(t)=t2-6t* на множестве (0;+∞) и исследовать, сколько точек пересечения он имеет с прямыми *у=а.* 2.Если а < -4,то нет решения, если а=-4 то одно решение, если а > -4, то два решения.   
*Выясните , при каких значениях параметра а неравенство *



*выполняется при всех х>0.*

*Ответ:* (-2;1)

***Метод интервалов для показательных и логарифмических неравенств.***

В курсе математического анализа для 10 класса доказывается теорема:

**Теорема.** Если */(х)* непрерывна на отрезке [*а;* *Ь*] и не обращается в 0 на открытом промежутке (*а,* *b*), то *f(х)* имеетодин и тот же знак во всех внутренних точках отрезка [*а;* *b*].

Это и есть основание для метода интервалов для непрерывной функции: найти нули *f(х)* и определить знаки *f(х)* напромежутках между соседними нулями, вычислив значения в «пробных» точках. Однако иногда «пробную» точку выбрать трудно, иногда при выяснении знака функции в «пробной» точке вычисления могут оказаться громоздкими, и из-за арифметиче­ской ошибки результат окажется неверным. Кроме того, очень часто школьники вообще не проверяют знаки, а расставляют их по аналогии с тем, как это делается для рациональной функ­ции, не задумываясь о том, действительно ли данная функция меняет знак при переходе через «ноль».

Мы выведем такие условия равносильности, которые часто за один шаг сведут решение самых распространенных показа­тельных и логарифмических неравенств к решению рациональ­ных неравенств.

*Показательные неравенства.*

Рассмотрим неравенство 

Пусть *f(x*) и *g(x) –* непрерывные функции на некотором промежутке Х, *а*>0. Тогда  --тоже непрерывные функции на Х, и к неравенству применим метод интервалов.

Условия равносильности:

Для любого *а*>0 верно, что * (a-1)(f(x)-g(x))>0*

**Правило1*.*** *Знак разности совпадает со знаком произведения*

*(a-1)(f(x)-g(x))>0 в ОДЗ.*

Из правила 1 следует, что для любой функции h(x) имеет место ещё одно условие равносильности: ()/h(x)>(<)0***(****(a-1)(f(x)-g(x)))/h(x)>(<)0*



**Пример1***:* Решить неравенство

Решение. Так как , в силу правила 1, знак разности (3х-30) совпадает со знаком произведения (3-1)(х-0), знак разности () совпадает со знаком произведения (2-1)(х2-4), то



******

Ответ: х∈(0;1] ∪ (2;+∞)

*Логарифмические**неравенства*

Рассмотрим неравенство 1оga *f(х)* > 0 (< 0), где *а* — задан­ное положительное число, отличное от 1. ОДЗ: */(х)* > 0.

Если *а >* 1, то 1оgа/(x) > 0(< 0) тогда и только тогда, когда/(x) >1(<1), т.е. (а - 1)(/(x) - 1) > 0(< 0).

Если 0 < а < 1, то 1оgа /(x) > 0 (< 0) тогда и только тогда, когда /(x) < 1 (> 1), т. е. опять

(а - 1)(/(x) - 1) < 0 (> 0).

И, наоборот, если (а — *1)(/(х)* — 1) > 0 (< 0), то

при а > 1 имеем */(х) >* 1 (< 1), а тогда 1оgа /(x) > 0 (< 0);

при 0 < а < 1 имеем */(х) <* 1 (> 1), а тогда 1оgа/(х) > 0(<0).

Следовательно, имеет место условие равносильности на ОДЗ

1оga/(х) > 0(< 0) ****** *(а-* 1)(/(x) - 1) > 0(< 0). (21)  
Можно записать полное условие равносильности, включа­ющее ОДЗ:



(22)

1оga/(х) > 0(< 0) ******

Условия равносильности (21) и (22) верны (для обоих зна­ков) и для нестрогого неравенства. Преимущество использования условий равносильности по сравнению с обычным способом решения даже таких простейших неравенств состоит в том, что мы не думаем о том, большим, или меньшим единицы является основание. Кроме того, нет необходимости писать фразы о той или другой монотонности. Это особенно важно при решении тестов ЕГЭ, когда время для их решения ограничено. Из (1) следует

Правило 2*. Знак 1оgа/(х) совпадает со знаком произведения*

*(а - 1)(/(х) - 1) в ОДЗ*

**Пример2***:* Решите неравенство



Решение. ОДЗ неравенства: х∈R. В силу правила 2, знак



совпадает со знаком произведения (1/2 – 1)(



2

(15-√6)/6

(15+√6)/6 3

Поэтому



Решаем методом интервалов. Строим рисунок и с него снимается ответ.

2

(15-√6)/6

(15+√6)/6 3

Ответ:



Для сравнения попробуйте решить это неравенство обычным способом.

Неравенство *1оgaf(x) > 1оgаg(х), где а > 0, a≠1.*

ОДЗ определяется системой 

Если а > 1, то *1оgа/(х) > 1оgаg(х)* тогда и только тогда, когда /(x) > *g(х),* т. е. (а - 1)(f(x) - g(x)) > 0.

Если 0 < а < 1, то *1оgа/(х) > logаg(х]* тогда и только тогда, когда /(x) <g(x), т. е. опять

(а - 1)(f(x) - *g(х)) >* 0.

И, наоборот. Если (а - 1)(f(x) - g(x)) > 0, то

при а > 1 имеем */(х) > g(х),* а тогда 1оgаf(x) > *1оgаg(х}.*

при 0 < а < 1 имеем /(x) < g(x), а тогда опять 1оga /(х) >1оgаg(x)-

Мы получили условие равносильности включа­ющее ОДЗ.

(*f*(x)> 0,

1ogа /(х) > (<) 1оga *g(х)* ****** *g(х)* > 0, (23)

(а-1)(/(х)-g(x))>0(<0).

Отсюда следует

**Правило 3.** *Знак разности1оgа/(х) – log a g(x) совпадает со знаком произведения*

*(a-1)(f(x)-g(x) в ОДЗ.*

Воспользовавшись правилом 3 можно очень просто решать неравенство вида 

Замечательно то, что мы освобождаемся от всех логарифмов за один шаг.

Пример3. *Решите неравенство* 

***Решение***: Найдем ОДЗ:



Воспользуемся правилом 3 в ОДЗ:



***Ответ:*** 

Упражнение.

Log0,2(3x+2) ≤ -Log5(5-2x) [0,6;2,5)

Log0,25(x+9) +log4(x2-9x+18)≤0 [1;3) ∪ (6;9]



В ряду стандартных неравенств особое место занимают логарифмические неравенства, содержащие переменную в основании логарифма, поскольку решение таких неравенств вызывает определенные трудности у школьников и абитуриентов. Наиболее распространенный способ решения этих неравенств заключается в рассмотрении двух случаев: 1) основание больше 1; 2) основание положительно и меньше 1. Другим методом решения является обобщенный метод интервалов, заключающий в приведении неравенства к виду *f(x)* < > 0, разбиении D(f) нулями *f(x)* на несколько интервалов и определении знака *f(x)* на каждом интервале по ее знаку в одной из точек соответствующего интервала.

Суть метода состоит в приведении логарифмов неравенства к любому основанию, большему 1, и применении равносильного преобразования (1).



Рассмотрим основные виды логарифмических неравенств, содержащих переменную в основании логарифма.

**Неравенства для логарифмов с переменным основанием**

Рассмотрим неравенство 1оgа(х) */(х) >* 0. ОДЗ левой части определяется системой



**Правило 4.** *Знак функции logа(x)f(x) совпадает со зна­ком произведения*

*(а(х) — 1)(f(x) — 1) в ОДЗ.*

Можно записать полное условие равносильности, включа­ющее ОДЗ:



(24)

Для нестрогого неравенства условие выглядит по-другому:



1. **Неравенства вида *logа(х) f(x)<b***

Применим формулу перехода к новому основанию и воспользуемся свойствами логарифмов, и преобразованием (1)

***logа(х) f(x)<b ***

Теперь остается воспользоваться преобразованием (1).



Следует помнить лишь об основной идее решения подобных неравенств, в переходе к основанию 1, и замене разности логарифмов разностью соответствующих функций при естественных ограничениях на каждую из них. Обратим внимание на часто используемый прием: если в качестве сомножителя левая часть неравенства содержит какой – либо логарифм (а не разность двух логарифмов), то для того, чтобы применить преобразование (1), необходимо представить этот логарифм в виде разности, вычтя из него нуль, записанный как логарифм единицы по тому же основанию.

Пример1. *Решите неравенство* 

***Решение:*** 

***Ответ*:** (3;+∞)

Пример 2. *Решите неравенство* 

***Решение:*** 

Используем тождества │a│2 = a2 и замену функций │u(x)│-│v(x)|функцией u2(x)-v2(x)



Последняя система легко решается методом интервалов.

***Ответ*:(-0,5;0]**∪[1;4)

**ΙΙ. Неравенства вида *log а (x)f (x) < log а(x )g (x)*.**

Рассмотрим неравенство 1оga(x) *f(х)* > 1оga(x) g(x), где а(х), *f*(x), g(х) непрерывные функции и а(х) >0, а(x) ≠ 1.

По определению, 1оgа(х) *f*(х) - 1оgа(х) *g(x)=* и, силу правила 3 и (21), справедливо

Правило 5. *Знак разности 1оgа(х) f(х) - 1оgа(х) g(x) совпадает со знаком произведении*

*(a(x)-1)(f(x)-g(x)) в ОДЗ.*

Запишем полное условие равносильности включающее ОДЗ:



При решении нестрогих неравенств условия равносильно­сти примут вид:



Пример3.Решите неравенство:



***Решение:***





***Ответ:*** {1}∪(1,5;3).

1. **Неравенства вида **

Последняя группа стандартных логарифмических неравенств, содержащих неизвестную в основании логарифма, - неравенства, левая и правая части которых представляют собой логарифмы с разными основаниями от одной и той же функции. Равносильная система в этом случае получается с помощью преобразований, аналогичных рассмотренным ранее.

****

Отметим, что эти преобразования применимы и в случае неравенства противоположного знака, и в случае нестрогих неравенств. Последнее особенно важно, поскольку случай равенств

а h(x) единице будет учтен в соответствующей системе, что позволит избежать потери решения, которая часто происходит при традиционном решении путем перехода к основанию h(x).

Пример4. Решите неравенство: 

Решение:





Решением первого неравенства последней системы – объединение промежутков (½;17/12)∪[8/5;2)∪(2;+∞). Пересечением решений трех оставшихся неравенств является множество (-∞;1)∪(3/2;5/3)∪ (7/4;3). Следовательно, решением всей системы:

(½;1) ∪[8/5;5/3)∪(7/4;2)∪(2;3).

Ответ: (½;1)∪[8/5;5/3)∪(7/4;2)∪(2;3).

**Упражнение.** *Решите неравенства методом интервалов.*



Для сравнения попробуйте решить эти неравенства другими способами.

Преимущество и красота приведенных условий равносильности состоит в том, что мы за один шаг освободились от логарифмов и переменных оснований, и теперь, если основание логарифма и подлогарифмическое выражение являются рациональными функциями, можно воспользоваться классическим методом ин­тервалов.

Заметим, что все условия равносильности формально точно такие же, как и для логарифмов с постоянным основанием, а потому легко запоминаются. Но, как показывает практика, полными условиями равносильности не всегда удобно пользоваться. Это происходит, если входящие в условия равносильности неравенства громоздки. Тогда удобно отделить нахождение ОДЗ от решения основного неравенства, как мы иногда и будем делать.

***Самостоятельная работа.***

Вариант1. Вариант2. Вариант3.

Решите. Решите. Решите.



*Ответы:* Вариант1. 1.3; 2.ø

Вариант2. 1.4, 2.(1/2;1)

Вариант3. 1.(-1;-1/2)∪(-1/4;0)∪(0;1), 2.(-2;-1)∪(1;2).

***Контрольное задание***

*Обязательные задачи. Дополнительные задачи.*

Решите уравнения (1-10): Решите уравнения (20-24):

19. Выясните, при каких значениях параметра *а* неравенство 2(*а*+2)∙2х-4х+*а*≤0 выполняется при всех значениях *х*.

***Критерии оценок.***

**Обязательные задачи**: «3» - решено не менее 10 задач;

«4» - решено не менее 14 задач;

«5» - решено не менее 18 задач.

При выполнении обязательной части задания должно быть решеноне менее трех неравенств.

**Дополнительные задачи: «4» -** решено не менее 5 задач;

«5» - решено не менее 9 задач;

**Таблица ответов.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ответ |  | {} | 3 |  | {1;100} | 0;-7;3. | {0;log5|21|5} | ± 2 |
| № | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** |
| **ответ** | 1|9;3 | -1/2;1/3 | (9/4;3/4),  (-9/2;3/2) |  |  | (1;2) | (Log43-1;+∞) | (2;3] |
| № | **17** | **18** | **19** | **20** | **21** | **22** | **23** | **24** |
| **ответ** |  | (-∞;-2) | (-∞;-1] |  | 2 | 227 ; 2 -8 | √2;√6 | 2 |

**Литература.**

1. Б.П.Гейдман «Логарифмические и показательные уравнения и неравенства». Учебное пособие для учащихся ОЛ ВЗМШ при МГУ им. Ломоносова. – М.: МЦНМО,2013
2. С.И.Колесникова «Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ». – М.: Айрис-пресс,2004
3. Б.В.Соболь, И.Ю.Виноградов, Е.В.Рашидова «Пособие для подготовки к ЕГЭ и централизованному тестированию по математике». – Ростов н/Д: «Феникс», 2003
4. Л.Д.Лаппо, М.А.Попов «Математика». – М.: Издательство «Экзамен», 2015
5. В.С.Крамор «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа». – М.: Просвещение, 1990
6. И.Ф.Шарыгин «Сборник задач по математике с решениями» – М.: ООО «Издательство Астрель», 2001
7. А.М.Назаренко, Л.Д.Назаренко «Тысяча и один пример. Равенства и неравества.» - Сумы.МП «Монолог», 1994
8. С.М.Саакян, А.М.Гольдман, Д.В.Денисов «Задачи по алгебре и началам анализа для 10-11 классов». – М.: «Просвещение», 1990
9. А.П.Карп «Сборник задач по алгебре и началам анализа» - М.: Просвещение, 1999
10. Газета «Математика» № 33, 2002 - С.Шестаков «Некоторые логарифмические неравенства».
11. В.В. Ткачук «Математика – абитуриента» II том
12. Газета «Математика» № 35,2002 – В.Малинин «Показательные уравнения»,
13. Газета «Математика» № 47, 2002 – М.Таранова «Показательные, логарифмические уравнения и неравенства»,